Л 8. Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной. Понятие дифференцируемости функций. Дифференциал функции. Правило дифференцирования сложной функции. Раскрытие неопределенностей

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 и в самой точке x_0 определена функция $y = f(x)$.

Определение. Приращением аргумента x в точке x_0 называется разность $\Delta x = x - x_0$.

Определение. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется разность

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Это приращение зависит от двух аргументов x_0 и Δx. Геометрически Δx и Δf означают изменения абсциссы и ординаты точки на графике $y = f(x)$ при перемещении из точки $(x_0, f(x_0))$ в точку $(x, f(x))$

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$, то она называется непрерывной в точке x_0. В самом деле, этот предел означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0, \text{ т. е. } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$ то это число называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Эта производная обозначается также одним из следующих символов:

$$y'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad f'_x\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Этот предел можно записывать также в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она имеет конечную производную в этой точке.

Выясним теперь связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции, для этого из определения выразим Δf. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, (где $\alpha(\Delta x)$ - б. м при $\Delta x \to 0$ (свойство 3^0 б. м , модуль 3)).

Следовательно, $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

1.1. Механический смысл производной. Пусть некоторая точка движется вдоль прямой и за время t проходит путь $S(t)$.

Тогда за промежуток времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ она проходит путь $S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\Delta S$, и средняя скорость точки на промежутке $[t_0, t_0+\Delta t]$ равна $v_{cp}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Мгновенная скорость v точки в момент t_0 равна пределу v_{cp} при $\Delta t \to 0$ $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{cp}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0)$.

Итак, мгновенная скорость точки в момент t_0 равна производной от пути, проходимого этой точкой по времени при $t=t_0$. Это и есть механический смысл производной.

1.2. Геометрический смысл производной. Через две точки $A(x_0,\ f(x_0))$ и $B(x_0+\Delta x,\ f(x_0)+\Delta f)$ на графике функции $y=f(x)$ проведем прямую. Эта прямая называется секущей к графику функции. Ее угловой коэффициент, т.е. тангенс угла наклона к оси Ox равен

$$tg\varphi=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Здесь Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение. Касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через точку $(x_0,\ f(x_0))$ при $\Delta x\to 0$.

Другими словами, касательная AD в точке $(x_0,\ f(x_0))$ - это прямая, проходящая через $(x_0,\ f(x_0))$, угловой коэффициент которой $tg\varphi_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\varphi$. Если $f'(x_0)$ существует, то из (1) следует, что $tg\varphi_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)$. В этом случае график функции в точке x_0 имеет касательную

Таким образом, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику $y=f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$ (геометрический смысл производной).

Уравнение этой касательной имеет вид $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Если $f'(x_0)$ не существует, то касательной к графику функции в точке $(x_0,\ f(x_0))$ провести нельзя (например, $y=|x|$ при $x_0=0$).

Вычислим производные некоторых основных элементарных функций, исходя из определения производной.

1. Постоянная функция $y=C$. $C'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$.

2. Показательная функция $y=x^a$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\left(a^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

В частности, $\left(e^x\right)'=e^x\ln e=e^x$.

3. Степенная функция $y=x^a$.

$$\left(x^a\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} = x^{a-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \left|\begin{matrix}\frac{\Delta x}{x} = h \\ x\neq 0, h\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= x^{a-1}\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^a - 1}{h} = a\cdot x^{a-1}$$

В частности, $\left(x^2\right)' = 2\cdot x^{2-1} = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

Теорема 1. (правила дифференцирования суммы, произведения и частного). Если функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы

1. $(u\pm v)' = u'\pm v'$ 2. $(u\cdot v)' = u'v + uv'$ 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Дифференцирование сложной функции. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0, $u(x_0) = u_0$, функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в x_0 и ее производная равна $[f(u(x_0))]' = f'(u_0)\cdot u'(x_0)$.

Параметрически заданная функция и ее производная

Функцию $y = f(x)$ иногда удобно записывать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t\in[\alpha,\beta]. \end{cases}$$

Таким образом описывается движение точки на плоскости в механике (t – время, x, y – координаты точки).

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где φ и ψ определены в окрестности t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда, если производные $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ существуют и $\varphi'(t_0)\neq 0$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$.

Определение. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta f = a\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где a - число, а $\alpha(\Delta x)$- б.м при $\Delta x\to 0$, то величина $df(x_0) = a\cdot\Delta x$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (главной частью приращения).

Теорема (о дифференциале). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела дифференциал в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$, при этом $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ (т.е. $a = f'(x_0)$).

Пример. Вычислить приближенно $\sin 46^0$. Имеем

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = (\sin x)' = \cos x,\ x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4},\ \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \Rightarrow$$

$$\sin(45^\circ + 1^\circ) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180} \approx 0{,}7191$$

Правила вычисления дифференциала непосредственно следуют из правил вычисления производных.

Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ дифференцируемы в точке, тогда

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(u + c) = du$, где с – число.

2) $d(u \cdot v) = vdu + udv,\ d(cu) = c \cdot du$.

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, если $v(x) \neq 0$.

4) Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x, а $y = f(u)$ в соответствующей точке u, то для сложной функции $y = f(u(x))$, $df(u) = f'(u)\cdot u'(x)dx = f'(u)du$.

Это правило называют инвариантностью формы дифференциала. Для функции $y = f(u)$ дифференциал $df = f'(u)du$, как в случае, когда u - независимая переменная, так и в случае, когда $u = u(x)$ есть функция другой переменной x.